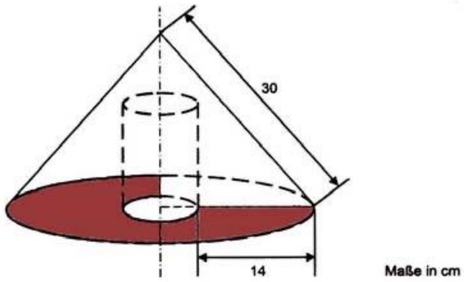
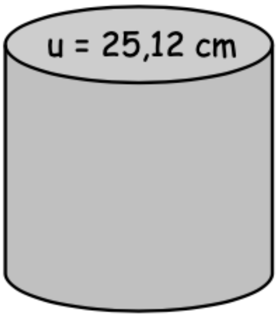
01 – Körper

Ein massives kegelförmiges Werkstück hat eine zylinderförmige Aussparung (siehe Skizze). Die Höhe dieser Aussparung beträgt $\frac{2}{3}$ der Kegelhöhe, der Umfang der Aussparung 25,12 cm.



Berechne das Volumen des Werkstücks.

1. Radius des Zylinders innen:



Der Umfang des Kreises beträgt 25,12 cm. Mit der Kreisumfangsformel kann man so den Durchmesser und den Radius des Kreises bestimmen.

$u = d \cdot \pi$

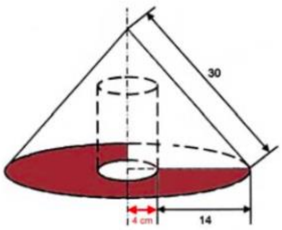
$25{,}12 = d \cdot 3{,}14 \qquad /:3{,}14$

$8 = d$

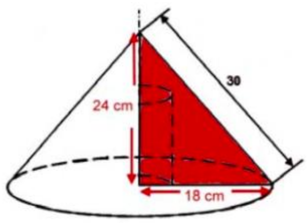
$8 : 2 = 4$

4 cm = r

2. Körperhöhe des Kegels mit dem Pythagoras:



Den Radius setzt man neben den 14 cm ein und erhält den Radius des Kegels. Jetzt kann man den Pythagoras anwenden.



$a^2 + b^2 = c^2$

$18^2 + b^2 = 30^2 \qquad / - 18^2$

$b^2 = 30^2 - 18^2$

$b^2 = 900 – 324$

$b^2 = 576 \qquad / \sqrt{}$

b = 24 cm

3. Volumen des Kegels:

Jetzt hat man alle Angaben, um das Volumen des Kegels zu bearbeiten.

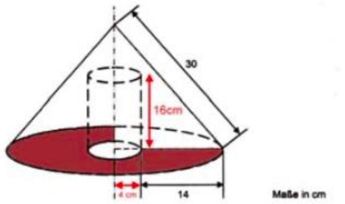
$V_K = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_K$

$V_K = \frac{1}{3} \cdot 18^2 \cdot 3{,}14 \cdot 24$

$V_K = 8\,138{,}88\ cm^3$

4. Höhe des Innenzylinders:

Die Höhe des Zylinders beträgt $\frac{2}{3}$ der Körperhöhe des Kegels.

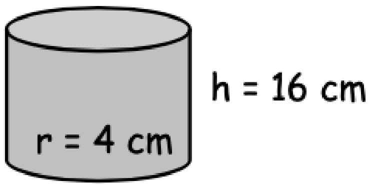


Höhe = $\frac{2}{3} \cdot 24$

Höhe = 16 cm

5. Volumen des Zylinders:

$V = r \cdot r \cdot \pi \cdot h_K$



$V = 4 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 16$

$V = 803{,}84\ cm^3$

6. Gesamtvolumen berechnen:

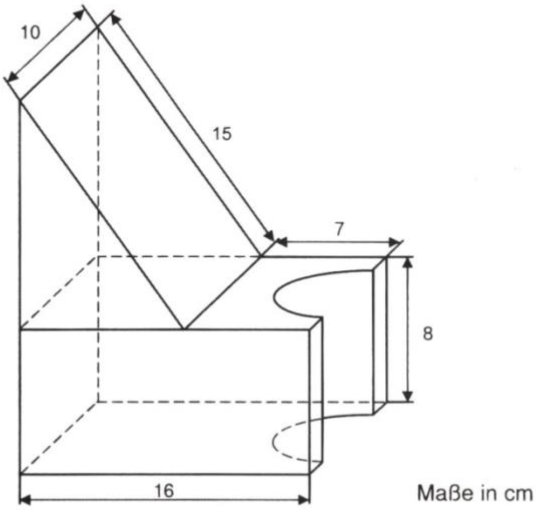
$V = 8\ 138{,}88\ cm^3 - 803{,}84\ cm^3$

$V = 7\ 335{,}04\ cm^3$

Antwort: Das Werkstück hat ein Volumen von 7 335,04 cm^3.

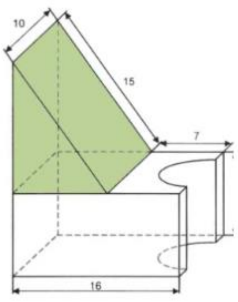
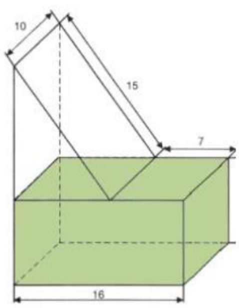
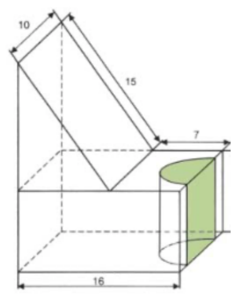
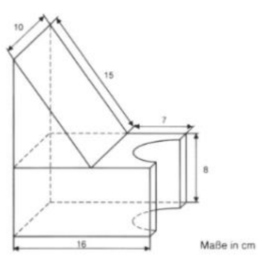
<u>02 – Körper</u>

Ein massives Werkstück besteht aus einer Dreieckssäule und einem Quader, aus dem ein Halbzylinder ausgespart wurde (siehe Skizze).
Der Durchmesser des Halbzylinders beträgt 8 cm.
Berechne das Volumen des Werkstücks.



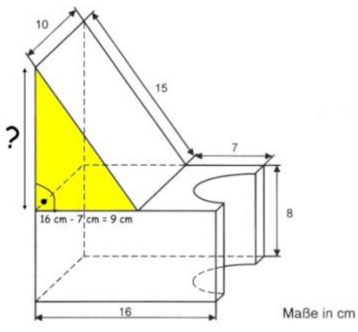
1. <u>Volumen des Werkstücks:</u>

Das Werkstück setzt sich aus drei Einzelkörpern zusammen:

Dreiecksprisma +	Quader -	Halbzylinder =	Werkstück
			

1. <u>Volumen des Dreiecksprismas:</u>

Die Höhe des Dreiecksprismas muss mit dem Pythagoras berechnet werden.



$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + 9^2 = 15^2 \qquad / - 9^2$

$a^2 = 15^2 - 9^2$

$a^2 = 144 \qquad / \sqrt{}$

<u>a = 12 cm</u>

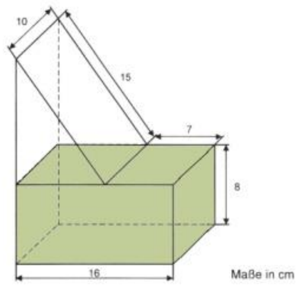
Antwort: Das Prisma hat eine Höhe von 12 cm.

Volumen des Prismas:

$V = \frac{g \cdot h}{2} \cdot h_K$ $\quad\quad$ $V = \frac{9 \cdot 12}{2} \cdot 10$ $\quad\quad$ $\underline{\mathbf{V = 540\ cm^3}}$

Antwort: Das Prisma hat ein Volumen von 540 cm^3.

2. <u>Volumen des Quaders:</u>



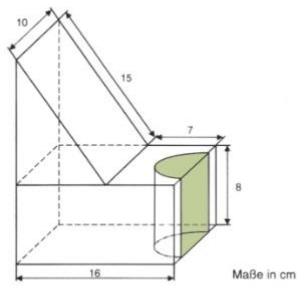
$V_Q = a \cdot b \cdot c$

$V_Q = 16 \cdot 10 \cdot 8$

$\underline{\mathbf{V_Q = 1\,280\ cm^3}}$

Antwort: Der Quader hat ein Volumen von 1280 cm^3.

3. <u>Volumen des Halbzylinders:</u>



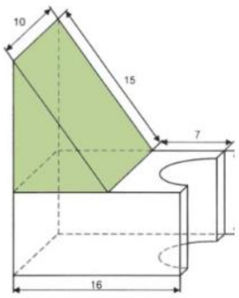
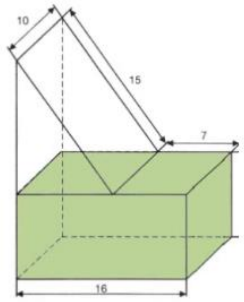
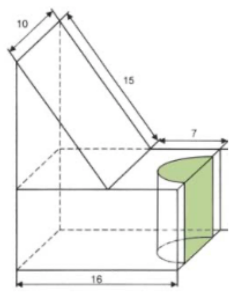
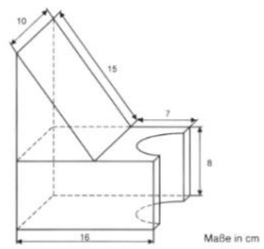
$V_Z = r \cdot r \cdot \pi \cdot h_K : 2$

$V_Z = 4 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8 : 2$

$\underline{\mathbf{V_Z = 200{,}96\ cm^3}}$

Antwort: Der Halbzylinder hat ein Volumen von 200,96 cm^3.

Volumen des Werkstücks:

Dreiecksprisma +	Quader -	Halbzylinder =	Werkstück
			

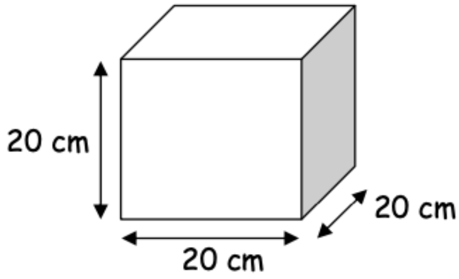
540 cm^3 + 1 280 cm^3 - 200,96 cm^3 = $\underline{\mathbf{1\,619,\ 04\ cm^3}}$

Antwort: Das Werkstück hat ein Volumen von 1 619,04 cm^3.

03 – Körper

Die Kantenlänge eines Würfels beträgt 20 cm.
Welchen Durchmesser hat die Grundfläche eines Kegels mit gleichem Volumen und gleicher Körperhöhe wie der Würfel.

1. Volumen des Würfels



Allgemeine Formel:

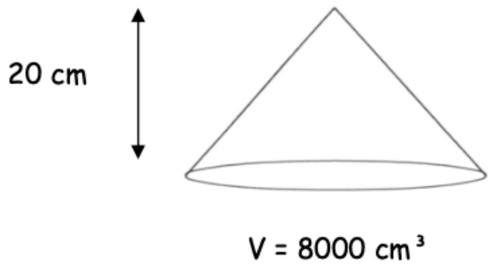
$V_W = a \cdot a \cdot a$

$V_W = 20\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} \cdot 20\text{ cm}$

$\underline{\underline{V_W = 8\,000\text{ cm}^3}}$

2. Durchmesser des Kegels mit gleichem Volumen und gleicher Körperhöhe

Allgemeine Formel: $V_K = \frac{1}{3} \cdot r \cdot r \cdot \pi \cdot h_K$



Einsetzen in die Formel: $8\,000\text{ cm}^3 = \frac{1}{3} \cdot r \cdot r \cdot 3{,}14 \cdot 20$ / : 20 / : 3,14

$127{,}39\text{ cm}^3 = \frac{1}{3} \cdot r \cdot r$ / · 3

$382{,}17\text{ cm}^3 = r^2$ / √

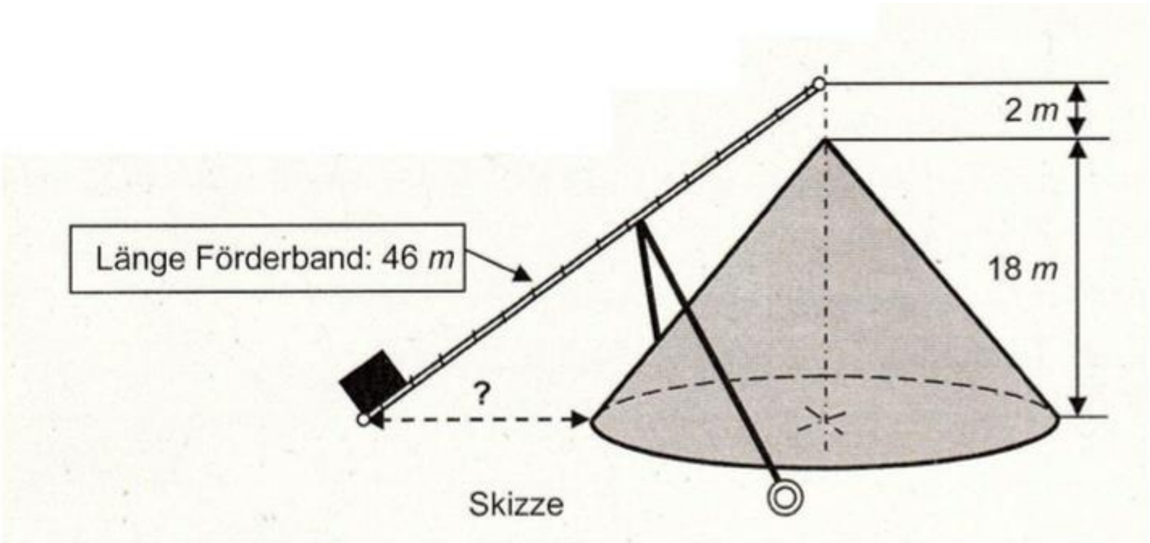
$19{,}55\text{ cm} = r$

$d = 2 \cdot r$ $d = 2 \cdot 19{,}55\text{ cm}$ $\underline{\underline{d = 39{,}10\text{ cm}}}$

Antwort: Der Kegel hat einen Durchmesser von 39,10 cm.

04 – Körper

Sand wird mit einem Förderband zu einem kegelförmigen Berg aufgeschüttet (siehe Skizze). Sein Volumen beträgt 4200 m^3.
Wie groß ist der Abstand zwischen dem Kegelrand und dem unteren Ende des Förderbandes?



1. Berechnung des Radius über die Volumenformel

Allgemeine Formel: $V_K = \frac{1}{3} \cdot r \cdot r \cdot \pi \cdot h_K$

Einsetzen in die Formel: $4\,200\ m^3 = \frac{1}{3} \cdot r \cdot r \cdot 3{,}14 \cdot 18\ m$ /: 18/ :3,14

$74{,}31\ m^3 = \frac{1}{3} \cdot r \cdot r$ / · 3

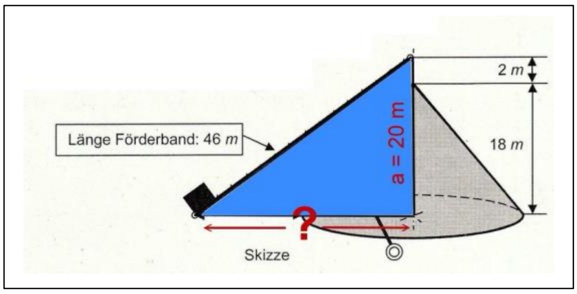
$222{,}93\ m^3 = r^2$ / √

$\underline{\underline{14{,}93\ m = r}}$

2. Unbekannte Länge des großen Dreiecks mit dem Pythagoras

Zuerst muss man die unbekannte Länge des blauen Dreieckes ausrechnen:

Pythagoras:



$a^2 + b^2 = c^2$

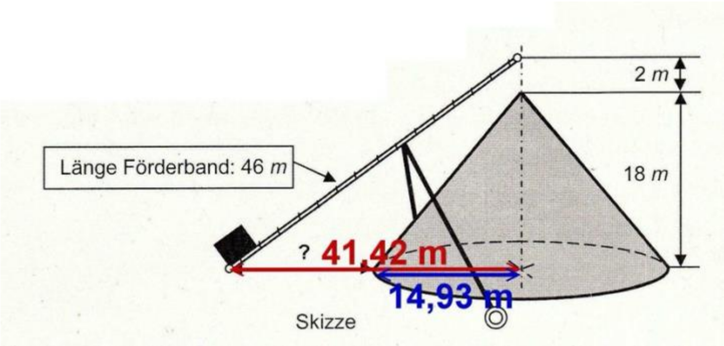
$20^2 + b^2 = 46^2$ / - 20^2

$b^2 = 2116 – 400$

$b^2 = 1\,716\ m^2$ / √

$\underline{\underline{\mathbf{b = 41{,}42\ m}}}$

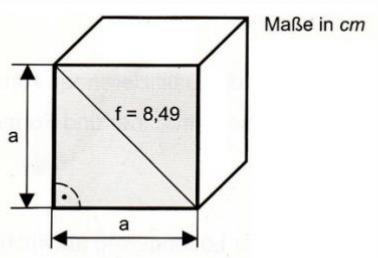
3. <u>Abstand Kegel zum Förderband</u>



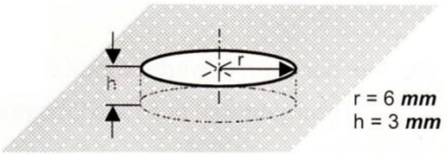
41,42 m – 14,93 m= 26,49 m

Antwort: Der Abstand beträgt 26,50 m.

05 – Körper



Im praktischen Unterricht wird zunächst ein massiver Würfel angefertigt. (siehe Skizze links) Dann werden genauso viele zylinderförmige Vertiefungen (siehe Skizze unten) ausgefräst, wie es Punkte auf einem üblichen Spielwürfel gibt.



Berechne das Volumen des fertigen Werkstücks. Runde alle Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen.

1. Berechnung der Seite a mit dem Pythagoras

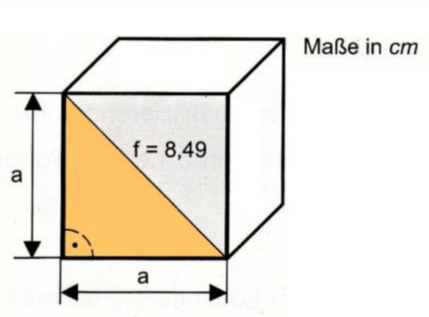
$a^2 + a^2 = c^2$

$a^2 + a^2 = 8{,}49^2$

$2a^2 = 72{,}0801 \quad / : 2$

$a^2 = 36{,}04005 \quad / \sqrt{}$

$a = 6{,}0033$ cm

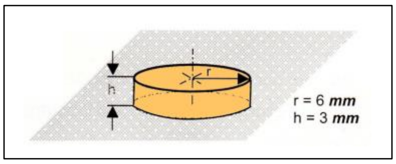


Antwort: Die Seite a ist 6 cm lang.

2. Volumen des Spielwürfels

Lösungsschema: Volumen Würfel – Volumen Löcher (Zylinder) = Gesamtvolumen

Volumen Würfel:	Volumen Löcher (Zylinder):	V aller Löcher:
$V_W = a \cdot a \cdot a$	$V_Z = r \cdot r \cdot \pi \cdot h_K$	Anzahl: 1+2+3+4+5+6= 21
$V_W = 6 \cdot 6 \cdot 6$	$V_Z = 6 \cdot 6 \cdot 3{,}14 \cdot 3$ mm	$21 \cdot 339{,}12$ mm^3 = **7 121,52 mm^3**
$V_W = 216$ cm^3	**$V_Z = 339{,}12$ mm^3**	
$V_W = 216\,000$ mm^3		



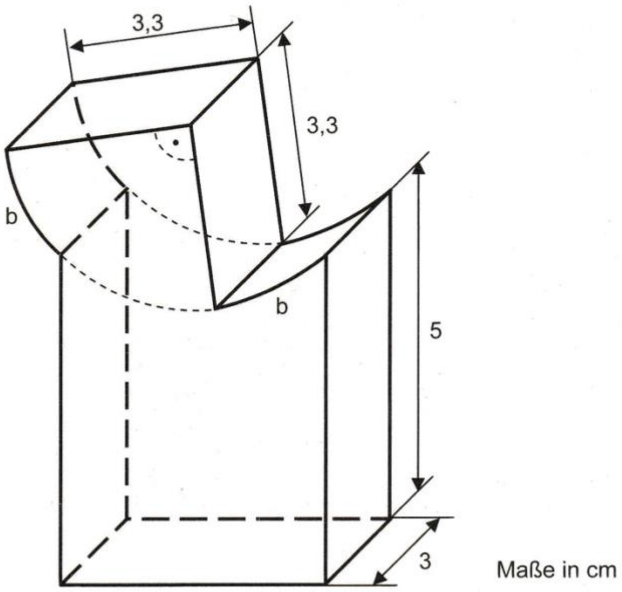
3. Gesamtvolumen

216 000 mm^3 – 7 121,52 mm^3 = 208 878,48 mm^3

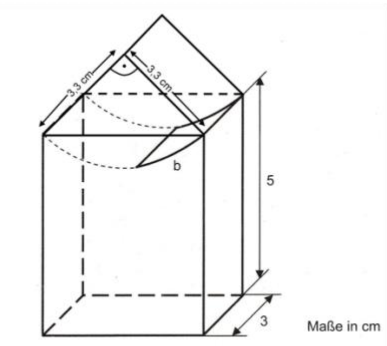
Antwort: Der Würfel hat ein Volumen von 208,88 cm^3.

06 – Körper

Berechne das Volumen des Körpers.

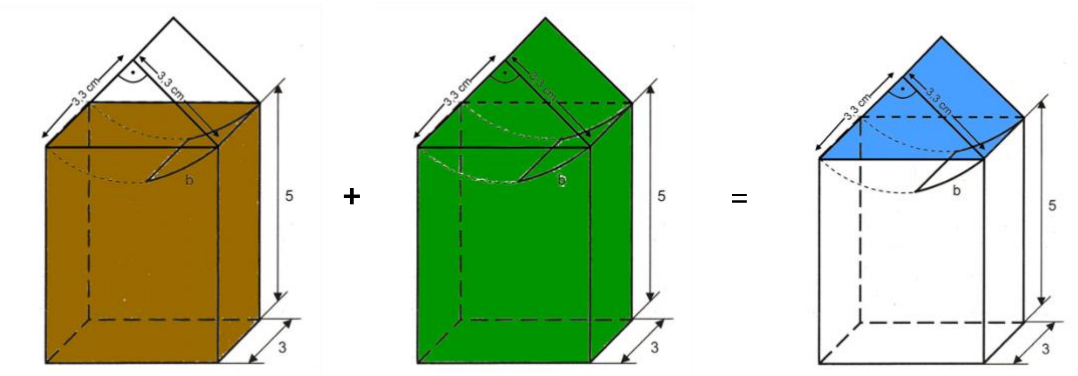


Einen berechenbaren Körper im Kopf formen

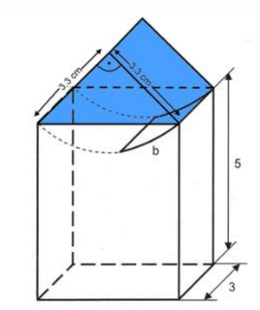


Lösungsschema anwenden

Volumen Dreiecksprisma + Volumen Quader = Volumen Gesamtkörper



Lösungsschritt 1: Volumen Dreieckspyramide



Volumen des Dreiecksprismas:

$V_D = \frac{g \cdot h}{2} \cdot h_K$

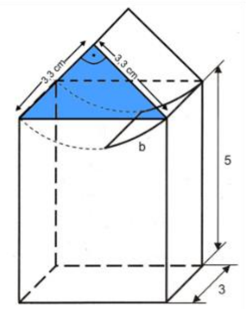
$V_D = \frac{3{,}3 \cdot 3{,}3}{2} \cdot 3$

$\underline{\underline{\mathbf{V_D = 16{,}335\ cm^3}}}$

Antwort: Das Dreiecksprisma hat ein Volumen von 16,335 cm^3.

Lösungsschritt 2: Volumen Quader

Die Seite a des Quaders berechnest du mit dem Pythagoras aus dem Dreiecksprisma:



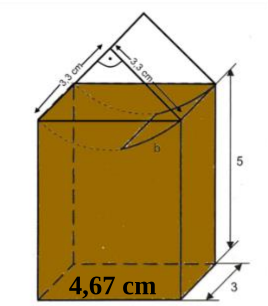
$a^2 + a^2 = c^2$

$3{,}3^2 + 3{,}3^2 = c^2$

$21{,}78 = c^2 \quad / \sqrt{}$

$\underline{\underline{\mathbf{4{,}67\ cm = c}}}$

Volumen Quader:

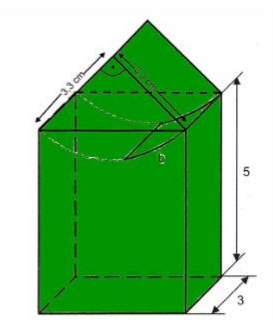


$V_{Qu} = a \cdot b \cdot c$

$V_{Qu} = 4{,}67 \cdot 3 \cdot 5$

$\underline{\underline{\mathbf{V_{Qu} = 70{,}05\ cm^3}}}$

Gesamtvolumen:

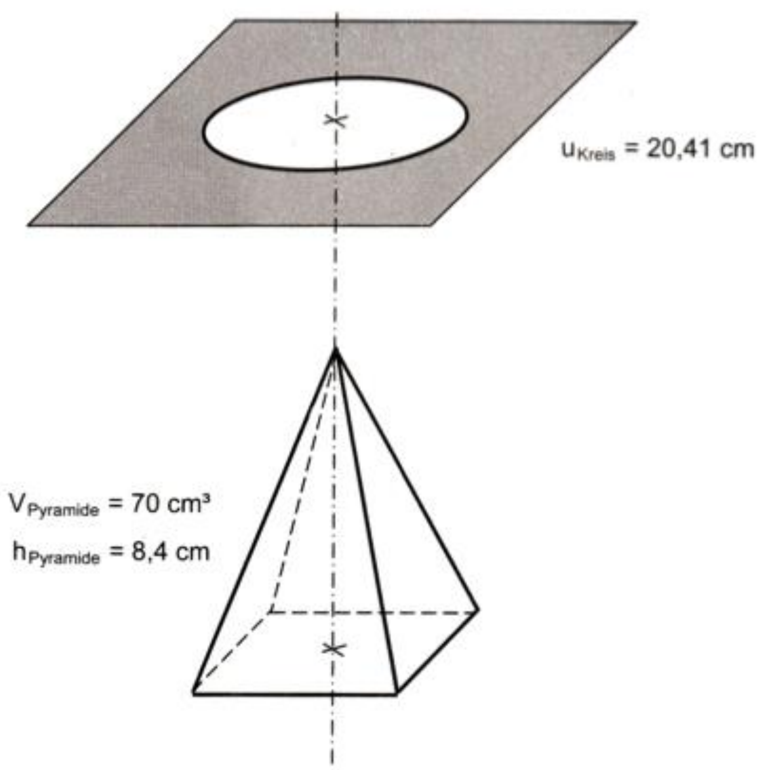


$V = 16{,}335\ cm^3 + 70{,}05\ cm^3$

$\underline{\underline{\mathbf{V = 86{,}385\ cm^3}}}$

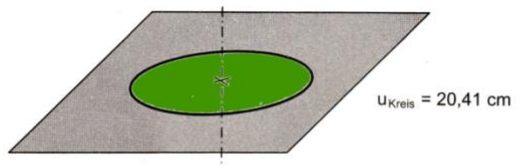
Antwort: Der Körper hat ein Volumen von 86,385 cm^3.

07 – Körper



Passt die Pyramide mit quadratischer Grundfläche durch die kreisförmige Öffnung (siehe Skizze)? Begründe rechnerisch.

1. Kreisdurchmesser berechnen:



Damit du herausfinden kannst, ob die Pyramide durch die Öffnung passt, musst du überprüfen, ob der Kreisdurchmesser größer ist als die Diagonale der Pyramidengrundseite.

Erst berechnest du den Kreisdurchmesser mit der Formel für den Umfang des Kreises.

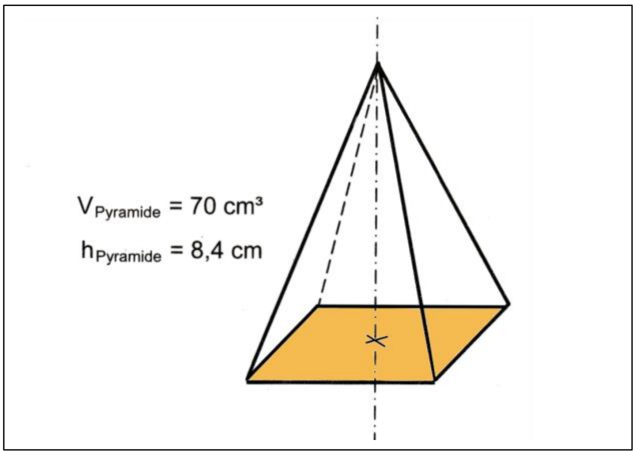
Allgemeine Formel für den Kreisumfang: $u_K = d \cdot \pi$

Einsetzen in die Formel: $20{,}41 = d \cdot 3{,}14 \quad /: 3{,}14$

<u>6,50 cm = d</u>

Antwort: Der Durchmesser der Kreisöffnung beträgt 6,50 cm.

2. <u>Diagonale der Grundseite der Pyramide</u>



a) Grundfläche der Pyramide

Erst berechnest du mit der Volumenformel die Grundfläche der Pyramide.

Allgemeine Formel:

$V_P = \frac{1}{3} \cdot$ Grundfläche $\cdot$ Höhe der Pyramide

Einsetzen in die Formel:

$70\ cm^3 = \frac{1}{3} \cdot G \cdot 8{,}4\ cm \quad /: 8{,}4$

$8{,}33 \quad = \frac{1}{3} \cdot G \quad / \cdot 3$

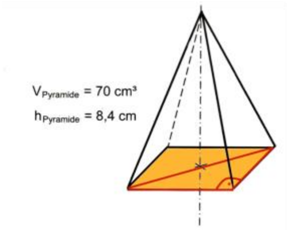
<u>25 cm² = Grundfläche</u>

b) Länge einer Seite

Da die Pyramide eine quadratische Grundfläche hat, sind alle Seiten gleich lang. Um eine Seite zu berechnen, musst du aus der Grundfläche die Wurzel ziehen.

$\sqrt{25}cm^2$ = **<u>5 cm</u>**

3. <u>Diagonale der Grundseite</u>



Diese Diagonale kannst du mit dem Pythagoras berechnen. Das passende rechtwinklige Dreieck findest du im rechten Bild.

$a^2 \quad + \quad a^2 \quad = c^2$

$5^2 \quad + \quad 5^2 \quad = c^2$

$25 \quad + \quad 25 \quad = c^2$

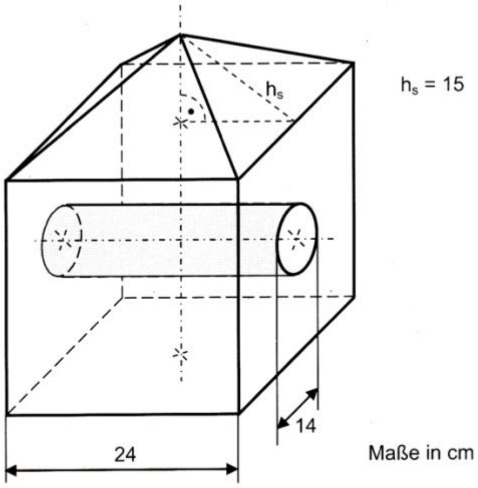
$50 \quad = c^2 \quad / \quad \sqrt{}$

<u>7,07 cm = c</u> $\Longrightarrow$ **c ≠ d** → **7,07 cm ≠ 6,50 cm**

Antwort: Die Pyramide passt **nicht** durch die Öffnung, da die Diagonale der Pyramidengrundseite länger ist als der Durchmesser der Kreisöffnung.

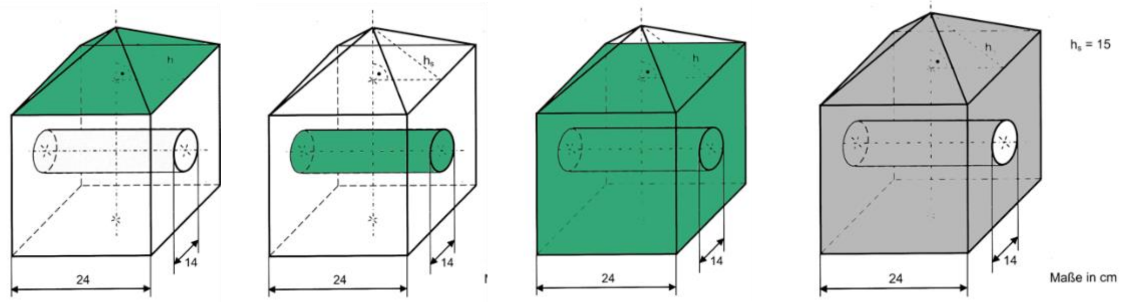
08 – Körper

Einem Würfel wurde eine Pyramide aufgesetzt und ein Zylinder ausgefräst (siehe Skizze). Berechne das Volumen des entstandenen Körpers. Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu.

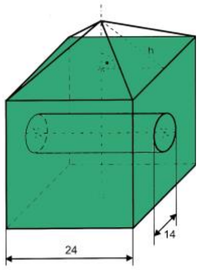


Lösungsschema anwenden:

Volumen Würfel + Volumen Pyramide - Volumen Zylinder = Volumen Gesamtkörper



1. Volumen des Würfels:



$V_W = a \cdot a \cdot a$

$V_W = 24 \cdot 24 \cdot 24$

$\underline{\underline{\mathbf{V_W = 13\,824\ cm^3}}}$

2. Höhe der Pyramide:

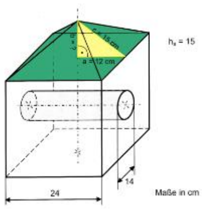
Die Höhe der Pyramide berechnest du mit dem Pythagoras (siehe Skizze).

$a^2 + b^2 = c^2$

$12^2 + b^2 = 15^2 \qquad /- 12^2$

$b^2 = 81 \qquad /\sqrt{}$

$\underline{\underline{\mathbf{b = \ \ 9\ cm}}}$

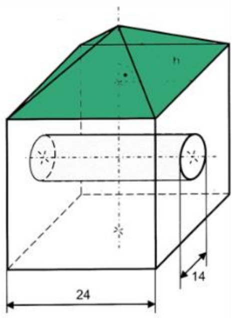


3. Volumen der Pyramide:

$V_P = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot h_K$

$V_P = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 24 \cdot 9$

V_P = 1 728 cm³

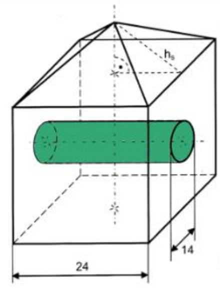


4. Volumen des Zylinders:

$V_Z = r \cdot r \cdot \pi \cdot h_K$

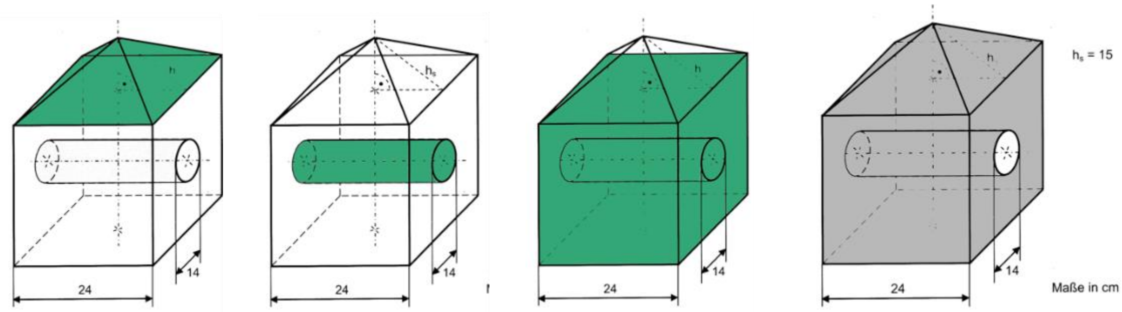
$V_Z = 7 \cdot 7 \cdot 3{,}14 \cdot 24$

V_Z = 3 692, 64 cm³



5. Gesamtvolumen:

Volumen Würfel	+	Volumen Pyramide	- Volumen Zylinder	= Volumen Gesamtkörper



$13\,824\ cm^3 + 1\,728\ cm^3 - 3\,692{,}64\ cm^3 =$ **$11\,859{,}36\ cm^3$**

Antwort: Der Körper hat ein Volumen von 11 859,36 cm³.

09 – Körper

Für ein Schulfest sollen Tischlichter hergestellt werden.
Dazu werden Gläser außen (ohne Boden und Deckel) mit Transparentpapier beklebt.

a) Um das zylinderförmige Glas mit dem Radius r = 6 cm und der Höhe h = 18 cm wird gelbes Transparentpapier geklebt. Berechne die beklebte Fläche.

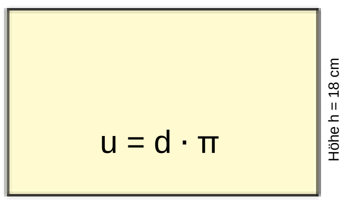
b) Zur Verzierung werden darauf vier gleichseitige Dreiecke (a = 5 cm) aus rotem Papier geklebt. Wie groß ist der Flächeninhalt dieser vier Dreiecke insgesamt?

c) Berechne, ob 3 m^2 gelbes Transparentpapier für 45 Lichter reichen?

a) <u>beklebte Glasfläche:</u>

Zu berechnen ist der Mantel des Zylinders. Dieser Mantel ist aufgeschnitten ein Rechteck. Eine Seite des Rechtecks hat die Höhe h = 18 cm des Zylinders. Die andere Seite ist der Umfang des Kreises (Grundfläche) mit der Formel u = d · π.

Grundseite s ist der Umfang des Kreises



Grundseite s ist der Umfang des Kreises

Der Mantel des Zylinders hat die Form eines Rechtecks.

$A_R = a \cdot b$

A_R = Umfang des Kreises · Höhe des Zylinders

$A_R = d \cdot \pi \cdot h_K$

$A_R = 12 \cdot 3{,}14 \cdot 18$

$\underline{A_R = 678{,}24\ cm^2}$

b) <u>Dreiecke berechnen (Höhe und Fläche):</u>

Vier gleichseitige Dreiecke werden auf das Glas aufgeklebt. Zur Berechnung der Fläche berechnest du die Höhe eines Dreiecks mit dem Pythagoras.

Die Höhe h der Pyramide berechnest du mit dem Pythagoras (siehe Skizze).

$a^2 + b^2 = c^2$

$2{,}5^2 + b^2 = 5^2 \quad / - 2{,}5^2$

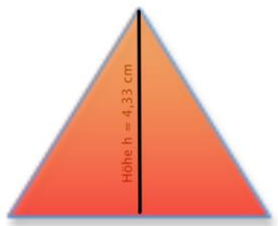
$b^2 = 25 – 6{,}25$

$b^2 = 18{,}75 \quad / \sqrt{}$

$\underline{b = 4{,}33\ cm}$

Antwort: Die Höhe des Dreiecks beträgt 4,33 cm.

Fläche der vier Dreiecke:



Seite a = 5 cm

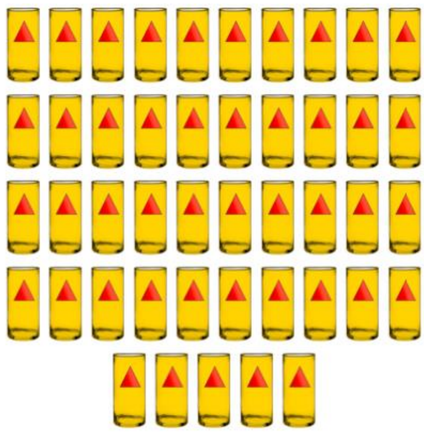
$A_D = \frac{g \cdot h}{2} \cdot 4$

$A_D = \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} \cdot 4$

$\underline{A_D = 43{,}30\ cm^2}$

Antwort: Die vier Dreiecke haben eine Fläche von 43,30 cm^2.

c) <u>Reichen 3 m^2 für 45 Lichter aus?</u>



Verbrauch gelbes Transparentpapier für 45 Lichter:
678,24 cm^2 · 45 = **30 520,80 cm^2**

Umwandlung in m^2: Umrechnungszahl ist 100!

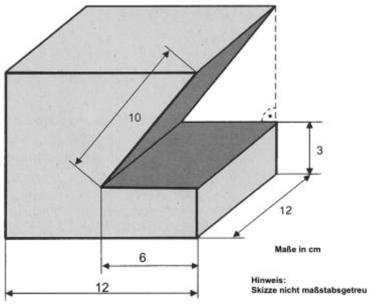
30520,80 cm^2 = 3,05 m^2

Antwort: 3 m^2 reichen für 45 Lichter <u>nicht</u> aus.

10 – Körper

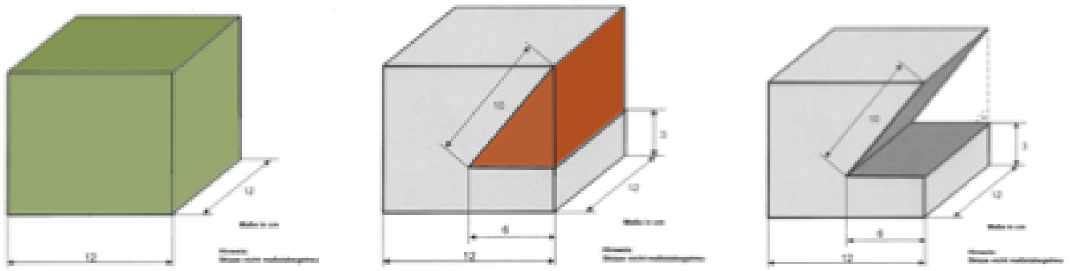
Aus einem Quader wird ein dreiseitiges Prisma herausgeschnitten (siehe Skizze).

Berechne das Volumen des Restkörpers.

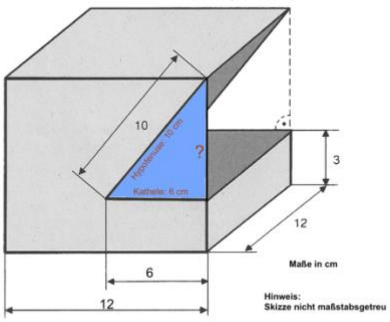


Lösungsschema:

Volumen Quader - Volumen Dreiecksprisma = Restkörper
= Gesamtkörper = Teilkörper



Schritt 1: Fehlende Länge zur Bestimmung der Quaderhöhe mit dem Pythagoras
Die fehlende Länge berechnest du mit dem Pythagoras (Skizze):



$a^2 + b^2 = c^2$

$6^2 + b^2 = 10^2 \quad / - 6^2$

$b^2 = 100 - 36$

$b^2 = 64 \quad / \sqrt{}$

$\underline{\mathbf{b = 8\ cm}}$

Schritt 2: Volumen Quader = Gesamtkörper

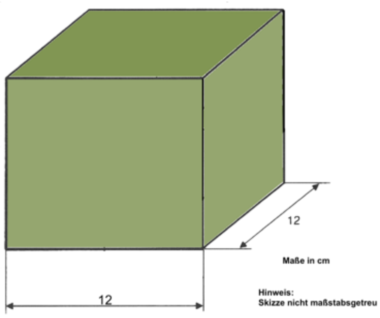
Höhe des Quaders: 3 cm + 8 cm = 11 cm

Volumen Quader:

Allgemeine Formel: $V_Q = a \cdot b \cdot c$

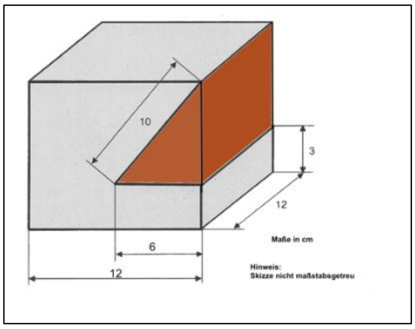
Einsetzen: $V_Q = 12 \cdot 12 \cdot 11$

$\underline{\mathbf{V_Q = 1\,584\ cm^3}}$



Antwort: Der Quader hat ein Volumen von 1 584 cm^3.

<u>Schritt 3:</u> Volumen Dreiecksprimas = Teilkörper



Volumen Dreiecksprisma:

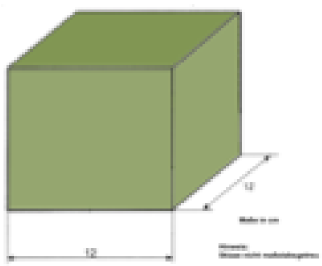
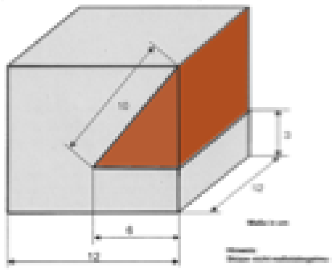
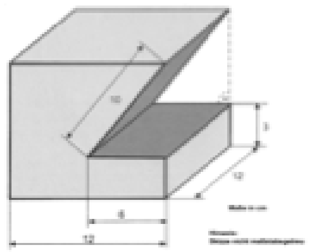
Allgemeine Formel: $V_D = \frac{g \cdot h}{2} \cdot h_K$

Einsetzen: $V_D = \frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 12$

$\underline{\mathbf{V_D = 288\ cm^3}}$

Antwort: Das Dreiecksprisma hat ein Volumen von 288 cm^3.

<u>Schritt 4: Volumen Restkörper</u>

Volumen Quader = Gesamtkörper	-	Volumen Dreiecksprisma = Teilkörper	=	Restkörper
				
1 584 cm^3	-	288 cm^3	=	1 296 cm^3

Antwort: Der Restkörper hat ein Volumen von 1 296 cm^3.