00 – Rationale Zahlen

Diese ersten Aufgaben entstammen nicht dem Qualifizierenden Mittelschulabschluss der letzten Jahre. Es handelt sich um eine Zusammenstellung von Aufgaben zum Thema: Potenzen, Zehnerpotenzen und Wurzeln.

1. Erkläre anhand eines selbst gewählten Beispiels, was ein Zehnerpotenz ist.
   Wann ist es sinnvoll, die Zehnerpotenzschreibweise zu benutzen?

2. Schreibe die folgenden Zahlen mithilfe von Zehnerpotenzen.

a) Die Lichtgeschwindigkeit beträgt 300 000 000 m/s.

____

b) Der Äquator ist ca. 42 000 000 m lang.

____

c) Eine Bakterienart hat eine Länge von 0,0006 cm.

____

d) Ein Wasserstoffatom hat eine Länge von etwa 0,0000000032 cm.

____

3. Welche Zahlen haben den gleichen Wert? Kreuze an.

	$6{,}03 \cdot 10^6$
	603 Millionen
	603 Milliarden
	6 030 000

4. Ordne die Zahlen der Größe nach. Beginne mit der Kleinsten.

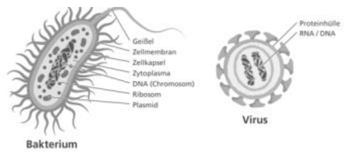
3 452 000 000 000 000 000 000 $\quad$ $2{,}41 \cdot 10^{20}$ $\quad$ $4{,}52 \cdot 10^{21}$

5. Speicherkarten für Digitalkameras haben oft eine Speicherkapazität von 2 Gigabyte. Ein Gigabyte hat 10^9 Byte.

a) Schreibe die Angaben über die Speicherkapazität der Speicherkarte in Byte aus.

b) Wie viele Fotos kann man darauf speichern, wenn ein Foto eine Kapazität von 2 Megabyte benötigt? Ein Megabyte hat 10^6 Byte.

6. Einige Bakterien erreichen Größen von bis zu $2\mu m$. Das Hepatitis-B-Virus hat eine Größe von 42 nm.
Tipp: 1 mm = 10^{-3}m; 1 μm = 10^{-6}m; 1nm = 10^{-9}m



a) Was ist größer? Das Bakterium oder das Virus? Begründe mathematisch.

b) Wie oft passt das Kleinere in das Größere hinein?

7. Haben die beiden Terme den gleichen Wert? Begründe deine Antwort mathematisch.

a) $(-4)^3$ und 4^3

b) $(-8)^4$ und 8^4

c) 3^2 und $3 \cdot 2$

d) $5^3 \cdot 5^3$ und 5^6

8. Zeichne folgende Zahlen auf einem Zahlenstrahl ein.

5	$\sqrt{36}$	$-\frac{3}{4}$	-7	$\sqrt{49}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$

9. Tom hat bei einer Aufgabe zur Seitenberechnung eins Quadrats folgendes Ergebnis erhalten: $a^2 = -81$
Er freut sich, da eine glatte Zahl oft ein Zeichen dafür ist, dass richtig gerechnet wurde. Als er allerdings die Aufgabe endgültig fertig rechnen will und im letzten Schritt die Wurzel ziehen möchte, hat er ein Problem.

a) Welches Problem taucht jetzt auf?

b) Warum ist es unmöglich, diese Aufgabe zu lösen? Begründe mathematisch.

Lösung:

1. Erkläre anhand eines selbst gewählten Beispiels, was ein Zehnerpotenz ist. Wann ist es sinnvoll, die Zehnerpotenzschreibweise zu benutzen?

z.B.: $40\ 000\ 000 = 4 \cdot 10^7$

Man benutzt Zehnerpotenzen, um sehr große und sehr kleine Zahlen übersichtlich darzustellen.

2. Schreibe die folgenden Zahlen mithilfe von Zehnerpotenzen.

a) Die Lichtgeschwindigkeit beträgt 300 000 000 m/s. $3 \cdot 10^8$

b) Der Äquator ist ca. 42 000 000 m lang. $4{,}2 \cdot 10^7$

c) Eine Bakterienart hat eine Länge von 0,0006 cm. $6 \cdot 10^{-4}$

d) Ein Wasserstoffatom hat eine Länge von etwa 0,0000000032 cm. $3{,}2 \cdot 10^{-9}$

3. Welche Zahlen haben den gleichen Wert? Kreuze an.

x	$6{,}03 \cdot 10^6$
	603 Millionen
	603 Milliarden
x	6 030 000

4. Ordne die Zahlen der Größe nach. Beginne mit der Kleinsten.

3 452 000 000 000 000 000 000 $\qquad 2{,}41 \cdot 10^{20} \qquad 4{,}52 \cdot 10^{21}$

$3\ 452\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 3{,}425 \cdot 10^{21}$

$2{,}41 \cdot 10^{20} < 3{,}425 \cdot 10^{21} < 4{,}52 \cdot 10^{21}$

5. Speicherkarten für Digitalkameras haben oft eine Speicherkapazität von 2 Gigabyte. Ein Gigabyte hat 10^9 Byte.

a) Schreibe die Angaben über die Speicherkapazität der Speicherkarte in Byte aus.

$1\ \text{GB} = 10^9\ \text{B} = 1\ 000\ 000\ 000\ \text{B}$

$2\ \text{GB} = 2 \cdot 10^9\ \text{B} = 2\ 000\ 000\ 000\ \text{B}$

b) Wie viele Fotos kann man darauf speichern, wenn ein Foto eine Kapazität von 2 Megabyte benötigt? Ein Megabyte hat 10^6 Byte.

1 MB = 10^6 B = 1 000 000 B
2 MB = $2 \cdot 10^6$ = 2 000 000 B

2 000 000 000 B : 2 000 000 B = 1 000

Antwort: Man kann 1 000 Fotos auf der Karte speichern.

6. Einige Bakterien erreichen Größen von bis zu $2\mu m$.
Das Hepatitis-B-Virus hat eine Größe von 42 nm.
Tipp: 1 mm = 10^{-3}m; 1 μm = 10^{-6}m; 1nm = 10^{-9}m

a) Was ist größer? Das Bakterium oder das Virus? Begründe mathematisch.

$2\mu m = 2 \cdot 10^{-6}$ m = 0,000002 m

42nm = $42 \cdot 10^{-9}$ m = 0,000000042 m

Das Bakterium ist größer. 0,000000042 m < 0,000002 m

b) Wie oft passt das Kleinere in das Größere hinein?

0,000002 m : 0,000000042 m ≈ 48

Das Virus passt ca. 48-mal in das Bakterium.

7. Haben die beiden Terme den gleichen Wert? Begründe deine Antwort mathematisch.

a $(-4)^3$ und 4^3

$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Die beiden Terme haben nicht den gleichen Wert.

b) $(-8)^4$ und 8^4

$(-8)^4 = (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) = 4\,096$

$8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4\,096$

Die beiden Terme haben den gleichen Wert.

c) 3^2 und $3 \cdot 2$

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$3 \cdot 2 = 6$

Die beiden Terme haben nicht den gleichen Wert.

d) $5^3 \cdot 5^3$ und 5^6

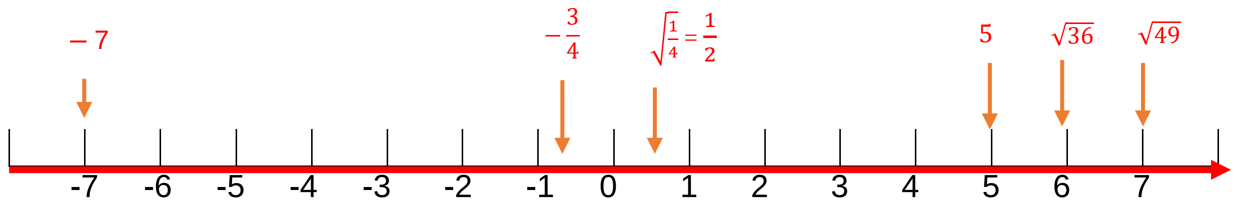
$5^3 \cdot 5^3 = 125 \cdot 125 = 15\,625$

$5^6 = 15\,625$

Die beiden Terme haben den gleichen Wert.

8. Zeichne folgende Zahlen auf einem Zahlenstrahl ein.

5	$\sqrt{36}$	$-\frac{3}{4}$	-7	$\sqrt{49}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$



9. Tom hat bei einer Aufgabe zur Seitenberechnung eins Quadrats folgendes Ergebnis erhalten: $a^2 = -81$
Er freut sich, da eine glatte Zahl oft ein Zeichen dafür ist, dass richtig gerechnet wurde. Als er allerdings die Aufgabe endgültig fertig rechnen will und im letzten Schritt die Wurzel ziehen möchte, hat er ein Problem.

a) Welches Problem taucht jetzt auf?

Der Taschenrechner zeigt „ERROR“.

b) Warum ist es unmöglich, diese Aufgabe zu lösen? Begründe mathematisch.

Wurzelziehen kann man nur von einer Zahl, die quadriert wurde. Durch Quadrieren kann aber nie eine negative Zahl entstehen.

Rechenregel: $a^2 = a \cdot a$ (man nimmt die Zahl mit sich selbst mal), deshalb gilt:

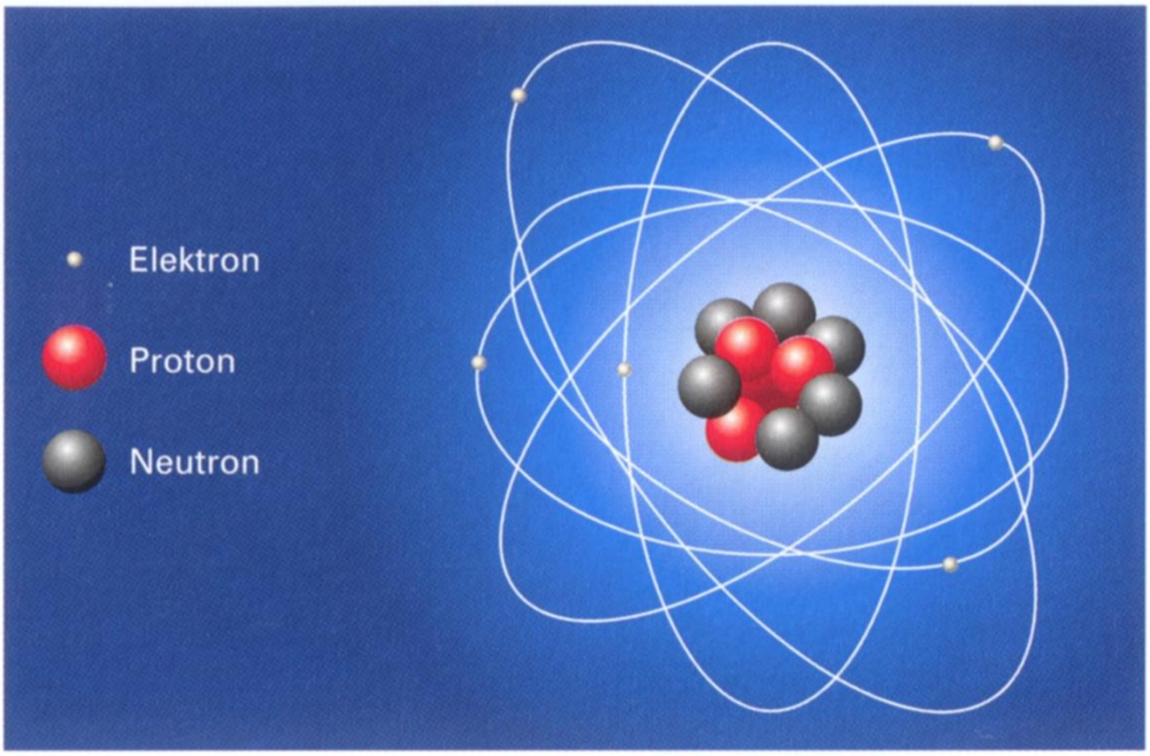
$(-) \cdot (-) = +$	$(+) \cdot (+) = +$

Eine Wurzel aus einer negativen Zahl zu ziehen, ist daher nicht möglich.

01 – Rationale Zahlen

Alle bekannten Stoffe sind aus Atomen aufgebaut. Die Stoffe unterscheiden sich nur durch die unterschiedliche Anzahl der Kernteilchen. Der Kern ist aus elektrisch positiven Protonen (Masse ca. $1{,}673 \cdot 10^{-24}$ g) und etwa gleich schweren Neutronen aufgebaut.

a) Berechne die Masse eines Elektrons. Es wiegt den 1836-ten Teil eines Protons.
b) Der Kern eines Uran-Atoms besteht aus 92 Protonen und 146 Neutronen.
Berechne die Masse des Atomkerns.



a) Masse eines Elektrons:

$1{,}673 \cdot 10^{-24} : 1836 = \underline{\mathbf{9{,}11 \cdot 10^{-28}\ g}}$

Du gibst in den Taschenrechner ein: 1,673 : 1836, dann steht auf dem Rechner = $9{,}11^{-04}$, das bedeutet soviel wie = $9{,}11 \cdot 10^{-4}$ Jetzt musst du noch die Potenzen addieren $10^{(-24)+(-4)}$ und erhältst das Ergebnis von 10^{-28} . Damit lautet das Endergebnis: $9{,}11 \cdot 10^{-28}$.

Antwort: Ein Elektron wiegt dann $9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g.

b) Masse eines Urankerns:

$92 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-24} + 146 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-24} = 3{,}98 \cdot 10^{-22}$ g

$153{,}916 \cdot 10^{-24} \quad + \quad 244{,}258 \cdot 10^{-24} \quad = 398{,}174 \cdot 10^{-24}$,

da aber bei Zehnerpotenzen die erste Zahl immer eine Ziffer zwischen 1-9 sein muss, muss das Komma um zwei Stellen nach links rutschen und damit verändert sich die Potenz um 2 Stellen von 10^{-24} auf 10^{-22}.

Antwort: Der Urankern wiegt $3{,}98 \cdot 10^{-22}$ g.

02 – Rationale Zahlen

Die Bundesrepublik Deutschland ließ bis zur Einführung des Euros folgende Münzen prägen:

Münze	Stückzahl	Dicke in mm	Gewicht in g
1 Cent	2,4 Mrd.	1,67	2,30
2 Cent	1,1 Mrd.	1,67	3,06
5 Cent	2,2 Mrd.	1,67	3,92
10 Cent	2,4 Mrd.	1,93	4,10
20 Cent	1,1 Mrd.	2,14	5,74
50 Cent	0,9 Mrd.	2,38	7,80
1 Euro	1,2 Mrd.	2,33	7,50
2 Euro	0,8 Mrd.	2,20	8,50

a) Wie viele Tonnen Metall wurden für die 1- Euro und 2-Euro-Münzen insgesamt benötigt?
b) Wie viele LKW mit der Zuladung von jeweils 25 Tonnen wurden für den Transport dieser 1-Euro- und 2-Euro-Münzen benötigt?
c) Wie viele Kilometer wäre der Turm hoch, wenn man alle 1-Cent-, 2-Cent- und 5-Cent-Münzen übereinander stapeln könnte?

a) Tonnen Metall:

1 200 000 000 · 7,5 g + 800 000 000 · 8,50 g = 9 000 000 000 g + 6 800 000 000 g = **15 800 000 000 g**

oder:

$1{,}2 \cdot 10^9 \cdot 7{,}5\text{ g} + 8 \cdot 10^8 \cdot 8{,}50\text{ g} = 9 \cdot 10^9 + 6{,}8 \cdot 10^9 = 15{,}8 \cdot 10^9 = \mathbf{1{,}58 \cdot 10^{10}g}$

15 800 000 000 g = 15 800 000 kg = **15 800 Tonnen**

$1{,}58 \cdot 10^{10}\text{g} = 1{,}58 \cdot 10^7\text{kg} = \mathbf{1{,}58 \cdot 10^4 t}$

Antwort: Es werden 15800 Tonnen Metall benötigt.

b) Anzahl der LKW

15 800 Tonnen : 25 Tonnen = **632**

Antwort: Es werden 632 LKW benötigt.

c) Höhe des Münzturms:

2 400 000 000 · 1,67 mm + 1 100 000 000 · 1,67 mm + 2 200 000 000 · 1,67 mm =
4 008 000 000 + 1 837 000 000 + 3 674 000 000 =
9 519 000 000 mm

9 519 000 000 mm = 9 519 000 m = **9 519 km**

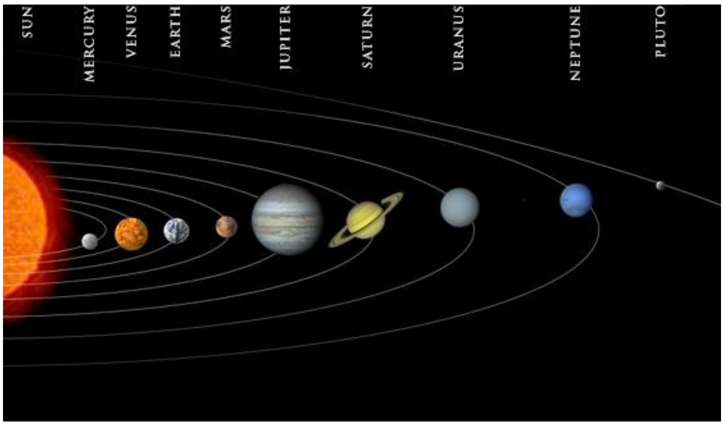
Antwort: Der Turm wäre 9 519 km hoch.

03 – Rationale Zahlen

Im Weltraum sind die Entfernungen für uns Menschen unfassbar groß.

a) Das Licht der Sonne legt auf seinem Weg zur Erde rund $1{,}5 \cdot 10^8$ km zurück. Wie lange benötigt es für die Reise, wenn die Lichtgeschwindigkeit etwa 300000 km /s beträgt?

b) Die Raumsonde Voyager 2 sendete vom Neptun ein Funksignal zur Erde. Dieses Signal wurde mit Lichtgeschwindigkeit übertragen und erreichte die Erde nach 4 Stunden und 6 Minuten. Welche Entfernung legte es dabei zurück? Gib das Ergebnis als große Zahl und als Zehnerpotenz an



a) Zeit des Lichtsignals zur Erde:

150 000 000 km : 300 000km/s = **500 s**

Antwort: Das Licht braucht 500 Sekunden.

b) Entfernung des Planeten Neptun zur Erde:

4 Stunden und 6 Minuten
$4 \cdot 60$ min $\cdot$ 60 s + $6 \cdot 60$s =
14 400 s + 360 s = **14 760 s**

Entfernung:
300 000 km/s $\cdot$ 14 760s = 4 428 000 000 km = **$4{,}428 \cdot 10^9$ km**

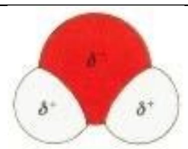
Antwort: Das Signal legte $4{,}428 \cdot 10^9$ km zurück.

04 – Rationale Zahlen

a) Ein Kohlenstoff-Atom hat eine Masse von $1{,}993 \cdot 10^{-23}$ g.
Die sogenannte atomare Masseneinheit μ ist der zwölfte Teil davon.
Berechne μ.

b) Ein Wasserteilchen setzt sich aus zwei Wasserstoff-Atomen und einem Sauerstoff-Atom zusammen. Berechne die Masse eines Wasserteilchens.

Element	Masse des Atoms
Wasserstoff	$1{,}674 \cdot 10^{-24}$ g
Sauerstoff	$2{,}657 \cdot 10^{-23}$ g



c) Ein Blei-Atom hat eine Masse von $3{,}44 \cdot 10^{-22}$g
Aus wie vielen Atomen bestehen 50 g Blei?

a) Masseneinheit des μ eines Kohlenstoffatoms:

$\mu = 1{,}993 \cdot 10^{-23}$ g : 12
$\mu = 0{,}1661 \cdot 10^{-23}$ g
Zehnerpotenzen: erste Zahl zwischen 1 – 9 !
Damit verschiebt sich das Komma um eine Stelle nach links und die Potenz verändert sich von -23 auf -24.

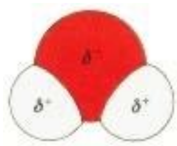

Der Diamant – auch ein Kohlenstoff

$\mu = 1{,}661 \cdot 10^{-24}$ g

Antwort:
Die atomare Masseneinheit μ eines Kohlenstoffatoms beträgt $1{,}661 \cdot 10^{-24}$ g.

b) Masse eines Wasserteilchens:

Wassermolekül = 2 Wasserstoffatome + 1 Sauerstoffatom
H_2O = $21{,}674 \cdot 10^{-24}$ g + $2{,}657 \cdot 10^{-23}$ g



H_2O = $2{,}992 \cdot 10^{-23}$ g

Antwort: Ein Wassermolekül hat eine Masse von **$2{,}992 \cdot 10^{-23}$ g.**

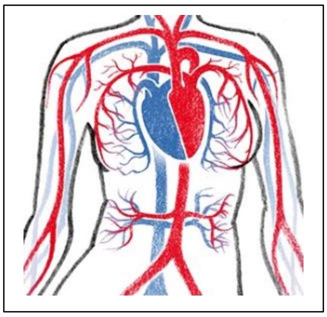
c) Anzahl an Atomen in 50 g Blei:

50 g : $3{,}44 \cdot 10^{-22}$ = **$1{,}453 \cdot 10^{-23}$**

Antwort: In 50g Blei sind $1{,}453 \cdot 10^{-23}$ Bleiatome.


Blei ist ein leicht verformbares und sehr weiches Schwermetall in grauer Farbe.

05 – Rationale Zahlen



Das menschliche Blutkreislaufsystem besteht aus drei Arten von Blutgefäßen:
Arterien, Venen und Kapillaren.

a) Gib den Durchmesser der Blutgefäße mit Zehnerpotenzen an.

Arterienzweige	0,0006 m
Venenzweige	0,0015 m
Kapillaren	0,000008 m

b) Was ist der Unterschied zwischen Arterien und Venen?

Lösung:

a) Arterienzweige:

$0{,}0006\text{ m} = 6 \cdot 0{,}0001\text{ m} = \underline{\underline{\mathbf{6 \cdot 10^{-4}}}}\text{ m}$

Venenzweige:

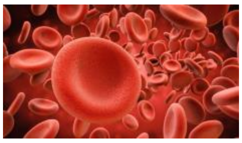
$0{,}0015\text{ m} = 1{,}5 \cdot 0{,}001\text{ m} = \underline{\underline{\mathbf{1{,}5 \cdot 10^{-3}\text{ m}}}}$

Kapillaren:

$0{,}000008\text{ m} = 8 \cdot 0{,}000001\text{ m} = \underline{\underline{\mathbf{8 \cdot 10^{-6}\text{ m}}}}$

b) Arterien sind alle vom Herzen wegführenden Gefäße.
Venen sind alle zum Herzen hinführenden Gefäße.

06 – Rationale Zahlen



In 1 mm^3 Blut befinden sich ca. $5 \cdot 10^6$ rote Blutkörperchen.
Ein Erwachsener besitzt ca. 6 Liter Blut.

a) Wie viele rote Blutkörperchen besitzt er?
b) Ein rotes Blutkörperchen hat einen Durchmesser von $7 \cdot 10^{-3}$ mm. Wie viele Kilometer lang wäre das Band, wenn man alle roten Blutkörperchen eines Menschen aneinanderlegen würde?
c) Die durchschnittliche Lebensdauer eines roten Blutkörperchens beträgt 120 Tage. Wie viele Blutkörperchen werden im Laufe von 50 Jahren gebildet? Rechne mit 360 Tagen.

Lösung:

a) $6\ l = 6\ dm^3$ - $6\ dm^3 = 6\,000\ cm^3 = 6\,000\,000\ mm^3$

$6\,000\,000\ mm^3 = 6 \cdot 10^6\ mm^3$

$6 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^6 = 30 \cdot 10^{6+6} = 30 \cdot 10^{12} = \underline{\underline{\mathbf{3 \cdot 10^{13}}}}$

Antwort: Ein Mensch besitzt ca. $3 \cdot 10^{13}$ rote Blutkörperchen.

b) $3 \cdot 10^{13} \cdot 7 \cdot 10^{-3}\ mm = 21 \cdot 10^{13-3}\ mm = 21 \cdot 10^{10}\ mm$

$21 \cdot 10^{10}\ mm = 21 \cdot 10^9\ cm = 21 \cdot 10^8\ dm = 21 \cdot 10^7\ m = 21 \cdot 10^4\ km = \underline{\underline{\mathbf{2{,}1 \cdot 10^5\ km}}}$

Antwort: Wenn man alle roten Blutkörperchen aneinanderlegen würde, entsteht eine Strecke von $2{,}1 \cdot 10^5$ km.

c) 360 Tage : 120 Tage (Lebensdauer) = 3 pro Jahr

$3 \cdot 50$ Jahre = 150

$150 \cdot 3 \cdot 10^{13} = 450 \cdot 10^{13} = \underline{\underline{\mathbf{4{,}5 \cdot 10^{15}}}}$

Antwort: Im Laufe von 50 Jahren werden $4{,}5 \cdot 10^{15}$ rote Blutkörperchen gebildet.

07 – Rationale Zahlen

Ein Goldatom wiegt $3{,}27 \cdot 10^{-22}$ Gramm.


Goldnugget mit 5,7 Gramm

a) Wie viele Goldatome befinden sich in einem Nugget (Goldklumpen) mit einem Gewicht von 376, 24 g?

b) Ein Goldatom hat einen Durchmesser von $2{,}7 \cdot 10^{-15}$ m. Wie viele Goldatome passen aneinandergereiht auf eine Länge von 1,5 m?

Lösung:

a) $376{,}24 \text{ g} : (3{,}27 \cdot 10^{-22} \text{ g}) = 115{,}058 \cdot \frac{1}{10^{-22}} = 115{,}058 \cdot 10^{22}$

$115{,}058 \cdot 10^{22} \approx \underline{\underline{\mathbf{1{,}15 \cdot 10^{24}}}}$

Antwort: In einem Nugget von 376, 24 g befinden sich rund $1{,}15 \cdot 10^{24}$ Goldatome.

b) $1{,}5 \text{ m} : (2{,}7 \cdot 10^{-15} \text{ m}) = 0{,}555 \cdot \frac{1}{10^{-15}} = 0{,}555 \cdot 10^{15}$

$0{,}555 \cdot 10^{15} \approx \underline{\underline{\mathbf{5{,}5 \cdot 10^{14}}}}$

Antwort: Auf eine Länge von 1,5 m passen rund $5{,}5 \cdot 10^{14}$ Goldatome.

08 – Rationale Zahlen

In einem Schweißwerk werden Eisenbahnschienen von 120 m Länge hergestellt.
Berechne die Längenveränderung bei einem Temperaturanstieg von 15 °C, wenn sich Eisen bei einem Grad um $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ m ausdehnt.
Gib das Ergebnis in cm an.

Lösung:

$120 \text{ m} \cdot 15 \text{ °C} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 1800 \text{ m/°C} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 2\,160 \cdot 10^{-5} = 0{,}0216 \text{ m}$

0,0216 m = 0,216 dm = **2,16 cm**

Antwort: Die Längenveränderung beträgt bei einem Temperaturanstieg von 15 °C 2,16 cm.

****

Im Jahr 1994 wurde an einer Universität ein Großrechner in Betrieb genommen, der 40 Milliarden Rechenoperationen in einer Sekunde durchführen kann.
Berechne die Anzahl der Rechenoperationen, die der Computer in einem Jahr bewältigt.

Lösung:

40 Milliarden = $4 \cdot 10^{10}$

$4 \cdot 10^{10} \cdot 60$ (Sekunden) $\cdot$ 60 (Minuten) $\cdot$ 24 (Stunden) $\cdot$ 365 (Tage) $= 126\,144\,000 \cdot 10^{10}$

$126\,144\,000 \cdot 10^{10} \approx 1{,}26 \cdot 10^{18}$

Antwort: In einem Jahr bewältigt der Rechner rund $1{,}26 \cdot 10^{18}$ Rechenoperationen.